

## A BOLTZMANN-FÉLE ÁLLANDÓ MÉRÉSE TRANSZLÁCIÓS BROWN-MOZGÁS ALAPJÁN

Írta: BOR PÁL és KOVÁCS LÁSZLÓ

### Bevezetés

A főiskolai fizika szakos tanárképzés 1970-ben, majd kevéssel később 1972-ben új kerettantervet kapott, amelynek nevezetes sajátága, hogy bátrabban nyúl modernebb témakörökhöz. Ez a helyes törekvés a gyakorlatban akkor vezet a kívánatos eredményhez, ha az új témaköröket nemcsak kutatási eredmények megtanulandó végkövetkeztetéseiének közléseként kezeljük, hanem demonstrációs kísérletekkel, laboratóriumi gyakorlati mérésekkel és a mennyiségi összefüggéseknek a hallgatók matematikai és fizikai előtanulmányaihoz igazodó levezetésével szemléletessé és érthetővé is tesszük.

Munkánk részeredménye tükröződik az 1972-es tantervben. A megfogalmazott elvek realizálására pedig azáltal törekszünk, hogy a demonstrációs kísérletek, a laboratóriumi gyakorlatok, az elméleti meggondolások területén megkeressük és a fizikaoktatás keretébe illesztjük azokat a tipikus és alapvetően fontos anyagrészeket, amelyek a fenti célok elérését elősegítik.

A hőtánban az új kerettanterv a fenomenológiai tárgyalásmóddal szemben a molekuláris tárgyalásmódot favorizálja, mert ez a jelenségek mélyebb értelmezését és pontosabb leírását adja, könnyebbé teszi sok más anyagrész megértését és a világnézeti nevelés szempontjából is jobban kiaknázható. A molekuláris hőtán új mozgásformát mutat be, a *hőmozgást*. Ennek leírásához a szigorú determináltságot jelentő mechanikai törvények mellett statisztikai, valószínűségyszámítási törvényeket is fel kell használni, amelyekben az *ingadozási jelenségek* mindig fontos szerepet játszanak. Cikkünk egy, a molekuláris hőtánban alapvető fontosságú ingadozási jelenséget, a *transzlációs Brown-mozgással* foglalkozik.

A. EINSTEIN 1905-ben több cikket közölt a *Brown-mozgás* elméletéről. Ezekben utalt arra, hogy a kolloidrézsek ülepedési egyensúlyának beállta után kialakuló eloszlásból meghatározható a *Boltzmann-állandó*. Útmutatása alapján 1909-ben J. PERRIN több hónapos munkával megmérte a *Boltzmann-konstant* ( $k$ ), illetőleg a vele egyenértékű *Avogadro-állandó* ( $N_0$ ). A *Planck-féle* sugárzási törvény alapján már ismert értéküket 25 % pontossággal sikerült megkapnia.

Ugyancsak 1905-ben A. EINSTEIN és M. SMOLUCHOWSKI a transzlációs *Brown-mozgásra* olyan formulát vezetett le, amelynek alapján a részecske elmozdulásnégyzetének átlagából számítható a *Boltzmann-konstans*. PERRIN ennek alapján is méréseket végzett, ez irányú munkásságáért 1926-ban Nobel-díjat kapott.

Az annak idején sok nehézségbe ütköző, s épp ezért hosszadalmas, de jelentőségükben alapvető mérések a technika fejlődésével megérték arra, hogy napjainkban a felsőfokú fizikaoktatás gyakorlati anyagába kerüljenek. M. HORNE, P. FARAGO és J. OLIVER 1973-ban olyan módszert közöltek [1], amely lényegében PERRIN szedimentációs egyensúlyra vonatkozó eljárását laboratóriumi gyakorlatok keretében alkalmazza. Erre az adott nekik lehetőséget, hogy megfelelő szuszpenzió készítéséhez olyan, az amerikai kereskedelemben kapható anyagot (polystyren) találtak, amelynek szükséges tulajdonságait (sűrűség, közös részecskeátmérő) a gyártó cég pontosan közli. Méréseik ugyancsak 25%-os hibahatárral adják  $k$  értékét. Eljárásuk egyik értéke, hogy a mérés alapjául szolgáló exponenciális összefüggés könnyen érthető levezetése a legtöbb kézikönyvben megtalálható. Másik értéke az, hogy a szükséges mérési adatok felvétele csak másfél órát vesz igénybe.

Jelen cikkünkben azt mutatjuk be, miként lehet a translációs *Brown*-mozgást a főiskolai fizikaoktatás keretében olyan instruktívan beiktatni, hogy az tananyag-kiválasztási céljainknak megfeleljen, tehát a jelenség gyakorlati mérés tárgyát képezhesse (pl. *k*-ra vonatkozóan), s ugyanakkor az alapjául szolgáló összefüggés a hallgatók matematikai és fizikai előképzettségével megérthető, de mégis elfogadhatóan egzakt levezetést nyerjen. A levezetés a kézikönyvekben vagy nem szerepel [2], vagy olyan magas matematikát és oly sok statisztikai mechanikai előismeretet kíván [3, 4], amelyet hallgatóink csak nagyon nagy kitéréssel szerezhetnének meg. A következőkben a levezetésre általunk talált gondolatmenet lényegét adjuk, amely részben R. P. FEYNMANN meggondolásait követi [5].

## A „bolyongás” törvénye

*Kérdés:* hogyan mozog az  $\eta$  viszkozitású,  $T$  abszolút hőmérsékletű folyadékban az  $m$  tömegű,  $a$  sugarú gömbalakú kolloidrézecske?

Ha elég kicsi a részecske sugara, s elég rövid  $\tau$  időt veszünk figyelembe, a hőmozgást végző folyadékmolekulák által a részecskének adott impulzusok vektori összege a kis számú esetén jelentőssé váló statisztikai ingadozás következtében nullától különböző lesz. Az egymás után következő  $\tau$  időközökben a nyomásingadozásnak megfelelően a részecske elmozdul. Mozgását a továbbiakban „bolyongásnak” nevezzük, ezzel is utalva arra, hogy mozgásában a rendszertelenség alapvető sajáttság.

További meggondolásaink egyszerűsítése céljából tételezzük fel, hogy a szóban forgó kicsiny  $\tau$  idő alatt adott kolloidrézecske, mindig ugyanakkora nagyságú elmozdulást tesz. (A feltételezés jogosságára még visszatérünk.) Ha ezt az elmozdulást  $\vec{s}$ -al jelöljük, akkor feltevésünk szerint  $|\vec{s}| = s$  adott időre vonatkozóan mindig ugyanakkora, de különben  $\vec{s}$  a tér bármely irányába ugyanolyan valószínűséggel mutathat. Ez természetes következménye annak, hogy a folyadékmolekulák hőmozgásában nincs kitüntetett irány. A kicsiny kolloidrézecske rövid idő alatt adott impulzusok összege irány szerint teljesen véletlenszerű ingadozást mutat.

A  $\tau$ -hoz tartozó elmozdulás  $s$  nagyságára vonatkozó egyszerűsítő feltevésünk nem újszerű. Az impulzusátadás számításában hasonló egyszerűsítő feltevessel élünk akkor is, amikor az ideális gáz nyomását határozzuk meg [2]. Ott azt tételezzük fel, hogy mindegyik gázmolekula ugyanakkora  $v_0$  sebességgel mozog, illetőleg ütközéskor ugyanakkora ( $2mv_0$ ) impulzust ad az edény falának. Később pontosabban azt tudjuk meg, hogy  $v_0$  a molekulák sebességnégyzetének átlagából vont négyzetgyök:  $v_0 = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ .

Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy ha egy  $A$  mennyiség különböző esetekben  $A_1, A_2, \dots, A_n$  értéket vesz fel, ezek átlagán a számtani közepüket értjük, amit így jelölünk:  $\langle A \rangle$ , s így olvasunk:  $A$ -átlag. E definícióból következően  $(A_i + B_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mennyiségek átlagára érvényes az

$$\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$$

összefüggés, továbbá igaz, hogy

$$\langle \text{konstans. } A \rangle = \text{konstans. } \langle A \rangle.$$

Dolgozatunkban az „átlag” fogalmát a most megadott értelemben használjuk, s meggondolásainkhoz ez elegendő is lesz, mert mindig ugyanakkora  $\tau$  időközre okoskodva az időbeli átlag fogalmát megkerülhetjük.

Egyszerűsítő feltevésünk alapján teljes indukcióval nem nehéz belátni, hogy a  $t = n\tau$  ideig bolyongó részecske elmozdulásának négyzetes átlagára az

$$\langle s_n^2 \rangle = ns^2 \quad (1)$$

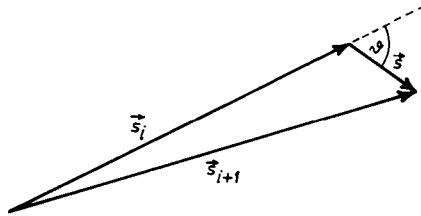
összefüggés érvényes. ( $n$  pozitív egész.)

Ha  $n = 1$ , akkor egyszerűsítő feltevésünk alapján (1) valóban igaz:

$$\langle s_1^2 \rangle = 1 s^2. \quad (2)$$

Ezek után megmutatjuk, hogy valahányszor (1) egy tetszés szerinti  $i$  indexre igaz, mindannyiszor  $(i+1)$ -re is igaz. ( $i$  pozitív egész.) Nyilvánvaló, hogy az elmozdulásokat vektorosan kell összegezni (1. ábra), azaz

$$\vec{s}_{i+1} = \vec{s}_i + \vec{s}.$$



1. ábra

Skaláris szorzással négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát:

$$s_{i+1}^2 = s_i^2 + s^2 + 2s_i s \cos(\vec{s}_i, \vec{s}).$$

Vegyük ennek az egyenletnek sok esetre vonatkozó átlagát:

$$\langle s_{i+1}^2 \rangle = \langle s_i^2 \rangle + s^2 + 2s \langle s_i \cos(\vec{s}_i, \vec{s}) \rangle. \quad (3)$$

Mivel adott  $\vec{s}_i$  mellett az irány tekintetében teljesen véletlenszerű  $\vec{s}$  elmozdulások miatt az  $(\vec{s}_i, \vec{s})$  -ek közt a  $\theta$  szög épp olyan gyakori, mint a  $(180^\circ - \theta)$ , ezért (3)-ban a jobb oldali harmadik tag nulla, tehát

$$\langle s_{i+1}^2 \rangle = \langle s_i^2 \rangle + s^2. \quad (4)$$

A szokásos teljes indukciós következtetéssel most már (2) és (4) alapján következik az (1) alatti összefüggés helyessége — amit állítottunk.

Gondolatmenetünk alapján nem nehéz belátni, hogy az egyszerűsítő feltevésünkben szereplő  $|\vec{s}| = s$  értéke a  $\tau$  idő alatti elmozdulások sok esetre vett négyzetes átlagának négyzetgyöke. (2) szerint ugyanis

$$s = \sqrt{\langle s_1^2 \rangle}.$$

Ha tehát egyszerűsítő feltevésünkkel nem élünk, kissé körülményesebben jutunk az (1) alatti összefüggéshez, amelynek jobb oldalán  $n\langle s_1^2 \rangle$  áll, de ez további megfontolásainkat nem zavarja.

A bolyongásra vonatkozó (1) alatti igazolt törvényből a továbbiak számára két fontos következtetést vonhatunk le.

a. A bolyongó részecske elmozdulásának négyzetes átlaga arányos a bolyongás  $t$  idejével, hiszen  $n=t/\tau$ . Tehát:

$$\langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = 3\langle x^2 \rangle = ct, \quad (5)$$

ahol  $x, y, z$  a  $t$  idő alatti elmozdulás derékszögű komponensét jelenti, s mivel a jelen-ségben nincs kitüntetett irány, a három komponens négyzetes átlaga ugyanakkora. A jobb oldalon szereplő  $c$  arányossági szorzó adott részecske és szuszpendáló folya-dék esetén állandó érték.

b. (5)-ből következően:

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \left\langle \frac{dx^2}{dt} \right\rangle = \left\langle 2x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \frac{c}{3} = \text{állandó}. \quad (6)$$

Ezzel kapcsolatban hivatkoznunk kell a differenciálhányados fogalmára s az átlagra vonatkozó előzetes megjegyzéseinkre.  $x^2$   $t$  időpillanathoz tartozó értékét  $x^2(t)$ -vel jelölve:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle x^2(t + \Delta t) \rangle - \langle x^2(t) \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle x^2(t + \Delta t) - x^2(t) \rangle}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{x^2(t + \Delta t) - x^2(t)}{\Delta t} \right\rangle = \frac{dx^2}{dt} = \left\langle 2x \frac{dx}{dt} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

A továbbiakban most már csak arra kell választ adnunk, adott részecske bolyon-gására milyen hatással van a szuszpendáló folyadék. Mivel a mozgó részecskére a pillanatnyi sebességével mindig ellentétes irányú Stokes-féle ellenállási erő is hat, a részecskére a következő mozgásegyenlet írható fel:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - 6\pi\eta a \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (8)$$

ahol  $\vec{r}$  a részecske helyvektora,  $\vec{F}$  pedig a részecskére a folyadékmolekulák által gya-korolt „pillanatnyi” erő. (8) az alábbi három skláregyenlettel egyenértékű:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x - 6\pi\eta a \frac{dx}{dt}, \quad (9)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y - 6\pi\eta a \frac{dy}{dt},$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z - 6\pi\eta a \frac{dz}{dt}.$$

A továbbiakban elég csak (9)-cel foglalkoznunk. Szorozzuk ezt  $x$ -szel, s hasz-náljuk fel a

$$\frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} \right) = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + x \frac{d^2 x}{dt^2}$$

azonosságot. Ekkor (9)-ből:

$$m \left[ \frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} \right) - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = x F_x - 6\pi\eta a x \frac{dx}{dt}. \quad (10)$$

Mivel a folyadékmolekulák hőmozgása rendszertelen, nem várhatjuk, hogy (10)-ben  $F_x$ -et  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  és  $t$  függvényként megadhatjuk. Csupán azt tudjuk, hogy kellően rövid  $\tau$  időközkhöz az impulzusátadás ingadozásából következően egy „átlagos”  $F_x$  erőkomponens rendelhető, s ily módon (10)-et egymás után következő nagy számú  $\tau$  időközre vonatkozóan felírhatjuk. Az így kapott egyenletek átlagát képezve:

$$m \left\langle \frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} \right) \right\rangle - m \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = \langle x F_x \rangle - 6\pi\eta a \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle. \quad (11)$$

Nézzük az itt szereplő tagokat.

A (7) alatti egyenlet sorhoz hasonló gondolatmenettel és (6) felhasználásával:

$$m \left\langle \frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} \right) \right\rangle = m \frac{d}{dt} \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = 0. \quad (12)$$

(6)-ból következően:

$$6\pi\eta a \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = 6\pi\eta a \frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt}. \quad (13)$$

A kolloidrészeszke mint egy nagy molekula végez translációs mozgást, s átlagos mozgási energiáját az energia ekvipartíciójának elvéből számíthatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle &= \frac{1}{2} m \left[ \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\rangle \right] = \frac{1}{2} m 3 \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = \\ &= 3 \frac{kT}{2}, \end{aligned}$$

ahonnan:

$$m \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = kT. \quad (14)$$

Végül még  $\langle x F_x \rangle$ -ről kell szólni. Ez nulla, mert bármilyen  $x$  abszcisszájú pontba is jutott a bolyongó részecske, a rendszertelen hőmozgást végző folyadékmolekulák által rá gyakorolt „pillanatnyi” erő  $x$ -komponense épp oly gyakorisággal  $F_x$ , mint  $(-F_x)$ ,

(11)-ből (12), (13) és (14) felhasználásával:

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{kT}{3\pi\eta a}.$$

Mindkét oldalt  $t$  szerint integrálva

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{3\pi\eta a} t, \quad (15)$$

amennyiben az elmozdulásnégyzetek átlagát a  $t=0$  időpillanattól számítjuk.

(15)-ből átrendezéssel kapható a  $k$ -mérés alapjául szolgáló Einstein—Smoluchowski-féle összefüggés

$$k = \frac{3\pi\eta a \langle x^2 \rangle}{Tt}. \quad (16)$$

Benne  $\langle x^2 \rangle$  a részecske  $t$  idő alatti elmozdulása bármely adott irányú komponensének négyzetes átlagát jelentheti, hiszen a bolyongásban nincs kitüntetett irány.

## Mérési eljárás

A mérés alapjául tejpor vizes szuszpenziójában bolyongó zsírgömböcskék mikroszkóppal történt megfigyelése szolgált.

A  $k$ -t meghatározó paraméterek közül  $T$ -t a  $\vartheta$  szobahőmérsékletből kaptuk:  $T = \vartheta + 273^\circ$ . A mikroszkóplámpa hőszugárzása  $T$  értékében hosszabb megfigyelési idő alatt sem okozott számba vehető változást.

$\eta$ -t, a víz belső súrlódási együtthatójának a szobahőmérséklethez tartozó értékét táblázatból vettük [6]. A tejpor vizes szuszpenziójának  $c$  koncentrációját célszerű oly kicsire választani, hogy a kiszemelt részecske helyzetének megfigyelését közeli részecskék sokasága ne zavarja. Tapasztalat szerint megfelelő a szuszpenzió koncentrációja, ha 1000 ml  $40^\circ\text{C}$ -os vízben 1 g „zsíros turista” tejporthoz „oldunk”. Ilyen koncentráció esetén a víz viszkozitását a tejporban levő oldható anyagok észrevehetően nem változtatják, amiről Höppler-féle viszkoziméterrel végzett mérés által győződünk meg. Az említett módon elkészített szuszpenzió (tárgylemezen fedőlemezlel lezárva)  $20^\circ\text{C}$ -os környezetben legalább 48 óráig,  $25^\circ\text{C}$ -os környezetben azonban csak 24 óráig marad használható. Ez időn túl mikroorganizmusok jelennek meg benne.

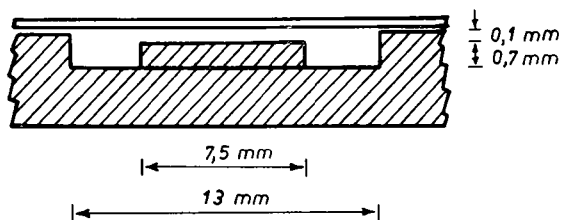
$t$ -t, az egy-egy bolyongás idejét 30 s-nak választottuk, ennyi idő alatt a részecske általában jól észlelhetően elmozdult. Az egymás után következő  $t$  időközök végét egy jelgenerátor rövid füttyel jelezte, amikor is a szem bázisvonalára merőlegesen álló okulárskáláról leolvastuk a megfigyelt részecske „alsó” szélső pontjának hely koordinátáit:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$ . A  $\xi$ -értékeket csak 0,5 okulárskálárész (továbbiakban: skr) pontossággal lehetett megbecsülni, mert a részecske örökös „nyüzgése” a becslést megnehezítette. Az  $n+1$  leolvasásból kapott

$$x_i = \xi_{i+1} - \xi_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

értékek négyzetének számtani közepe adta a (16)-ban szereplő  $\langle x^2 \rangle$ -ot. Méréseinkben  $n=90$  volt. Ennyi adat felvétele és értékelése két órás mérési gyakorlatba befér, s ugyanakkor többnyire lehetővé teszi a kiugró  $x^2$ -eknek a többi  $x^2$  által való kiegyenlítését.

Az  $x$ -ek okulármikrométerben leolvasott értékei cm-re számítandók át. A rendelkezésünkre álló Gamma-gyártmányú mikroszkópot  $15\times$ -ös okulárral és  $90\times$ -es objektívval használtuk. Az objektívmikrométerrel hitelesített okulárskálán 1 osztás  $1,052 \cdot 10^{-4}$  cm-t jelentett.

Az alkalmazott tárgylemez a szuszpenzió befogadására különlegesen volt kialakítva. Egy 0,8 mm mély hengergyűrű 0,1 mm mély korongalakú térrészt vett körül koncentrikusan (2. ábra). A mélyedésekbe orvosi fecskendővel annyi szuszpenziót vittünk, hogy azt a fedőlemezlel buborékmentesen le tudtuk borítani. A középső 0,1 mm vastag rétegben bolyongó részecskéket figyeltük, ahol mélységben nem tudott szemünk előtt eltűnni.



2. ábra

A paraméterek közül  $a$  mérése okozza a legnagyobb gondot. Ha a részecske átmérője 4—5 skr, akkor  $a$  viszonylag kis relatív hibával mérhető. Az ilyen „nagy” részecskénél azonban a  $t$  idő alatti elmozdulások többnyire 0,5 skr alatt vannak, s a csaknem mindig lefele történő kerekítések erősen lehúzzák az  $\langle x^2 \rangle$ -ot. Ha viszont a részecske átmérője kicsi, akkor  $a$  csak nagy relatív hibával mérhető — különösen azért, mert az intenzív mozgás a kontúr két átellenes pontjának egyidejű megfigyelését lehetetlenné teszi.

A nehézséget azáltal lehet megnyugtatóan kiküszöbölni, hogy nem a részecske átmérőjét mérjük, hanem *kiválasztunk* pontosan 2 skr átmérőjű részecskét. 5—10 perces próbálkozással lehet ilyet találni, s ki lehet várni azt a szerencsés pillanatot, amikor a kiszemelt részecske két skálaosztás között rövid időre „megáll”, s választásunk helyességéről meggyőződhetünk. A rendelkezésünkre álló eszközök mellett a most vázolt eljárás  $a$  meghatározására a  $k$ -mérés egyik sarkalatos pontja.

$a$ , illetőleg a  $\xi$ -k leolvasásakor a mikroszkópot a figyelt részecskére mindig élesre állítottuk. A kontúrvonal élességét („vékonyságát”) olajimmerzióval fokoztuk.

### Mérési eredmények

Mérési eredményeink közül csak egyet közlünk. Ennél:

$$n = 90$$

$$t = 30 \text{ s}$$

$$c = 1 \text{ g tejpor/1000 ml víz}$$

$$\vartheta = 26^\circ\text{C}; \quad T = 299^\circ\text{K}$$

$$\eta = 0,872 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} \text{ g s}^{-1}$$

$$a = 1 \text{ skr} = 1,052 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

Az elmozdulásokra vonatkozó értékeket az 1. táblázat tartalmazza, külön-külön feltüntetve a 10—10 elmozdulásból származó  $x^2$ -ek összegét is. A 91 leolvasásból kapott:  $\langle x^2 \rangle = 13,27 \text{ skr}^2$ .

A mért adatokból:

$$k = 1,425 \dots 10^{-16} \text{ erg/grad.}$$

Mérési eredményeinkhez és az eljárás értékeléséhez néhány megjegyzést kell fűzni.

Az itt közölt eredmény jól megközelíti az irodalmi értéket. Általában nem ez a helyzet. Pl. a szóban forgó szuszpenzióval végzett 10 egymás utáni méréssorozatban (mikor sorozatonként más-más 2 skr átmérőjű részecskét figyeltünk) az általunk mért érték és az irodalmi érték viszonyára a 2. táblázatban közölt arányokat kaptuk.

Mérési eredményeink általában az irodalmi érték alá esnek, feltehetően azért, mert a bolyongó részecske a tárgylemezhez, illetőleg fedőlemezhez érve kicsit tapad és fékeződik.

Mérési eredményeink 20—25 (olykor 40) %-os eltérése az irodalmi értéktől több szempontból indokolt. A statisztikai ingadozás kis számú esetben jelentős lehet. A közölt mérési sorozatban pl. a 10—10 elmozdulásból számított  $10x^2$  57,25 és 200 skr<sup>2</sup> között szóródik. Úgy látszik — s ezt megfigyeléseink is alátámasztják — hogy még a 90 elmozdulás sem mindig elegendő nagy számú adat az átlagoláshoz. Ha-

1. táblázat

$\xi/\text{skr}$	$x^2/\text{skr}^2$	$\xi/\text{skr}$	$x^2/\text{skr}^2$	$\xi/\text{skr}$	$x^2/\text{skr}^2$
2,5					
2	0,25	—12	20,25	3,5	20,25
2	0	—10,5	2,25	6,5	9
—2	16	—11	0,25	4	6,25
—4	4	—15,5	20,25	9	25
—6	4	—9	42,25	13,5	20,25
—7,5	2,25	—14	25	14	0,25
—15,5	64	—9	25	11	9
—18	6,25	—12	9	8	9
—20,5	6,25	—8	16	1	49
—17	12,25	—12,5	20,25	1	0
	115,25		180,50		148
—13	16	—7	30,25	—3	16
—18	25	—9	4	—10	49
—15	9	—11	4	—9	1
—21	36	—11	0	—11,5	6,25
—13,5	56,25	—14,5	12,25	—16,5	25
—8	30,25	—15	0,25	—14	6,25
—10	4	—17	4	—13,5	0,25
—7	9	—15,5	2,25	—13	0,25
—10,5	12,25	—16,5	1	—11,5	2,25
—9	2,25	—16	0,25	—12	0,25
	200		57,25		106,50
—6,5	6,25	—15	1	—12	0
—8,5	4	—13,5	2,25	—15	9
—10	2,25	—6,5	49	—10	25
—12,5	6,25	—6	0,25	—6	16
—18	30,25	—3	9	—3	9
—22	16	—6,5	12,25	—9,5	42,25
—23	1	—4,5	4	—9	0,25
—26,5	12,25	—2	6,25	—4	25
—22	20,25	0	4	—9,5	30,25
—16,5	30,25	—1	1	—6	12,25
	123,75		89		169

2. táblázat

k mért értéke/ $1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg.grad}^{-1}$
1,032
0,815
1,065
1,066
0,755
0,895
1,132
1,125
0,820
0,620

Középérték: 0,933



sonlóképp az eltérés forrásaként tekintendő az a körülmény is, hogy a mindig mozgó részecskék közül nem mindig sikerül egy pontosan 2 skr átmérőjűt kiválasztani. Ebben még az is közrejátszik, hogy két skálavonal „vastagsága” maga is kitesz 0,1 skr-t.

Az ismertetett mérőkísérletnek korlátozott pontossága ellenére is különös értékei vannak:

A kolloidrészecske úgy mozog, mint egy nagy molekula. Ezt a különleges mozgásformát, *a hőmozgást közvetlen megfigyelés tárgyává és mérés alapjává tenni nagyon tanulságos*, más módon alig érhető el — főleg nem két órás laboratóriumi gyakorlat keretében.

*A mérés a molekuláris hőtan alapfeltevéseinek helyességét és az elmélet teljesítőképességét nagyon instruktívan mutatja be.*

Zártláncú tv felhasználásával a jelenség régóta demonstrációs kísérlet. A monitor nagyítását ismerve, kis sorozatú mérésből *k nagyságrendjének meghatározása előadási kísérletbe is belefér.*

*k ismeretében a makrofizikai adatok alapján meghatározott egyetemes gáz-állandó (R) segítségével kiszámítható a molekuláris fizikában oly jelentős Avogadro-állandó is:  $N_0 = R/k$ .*

### Összefoglalás

A transláció *Brown*-mozgásra vonatkozó *Einstein*—*Smoluchowski*-féle formula a főiskolai fizika szakos hallgatók matematikai és fizikai előismereteihez igazodó gondolatmenettel elfogadhatóan egzaktul levezethető. A formula alapján kereskedelmi forgalomban kapható anyaggal és nem különleges teljesítőképességű mikroszkóppal mérési gyakorlat keretében kielégítő pontossággal meghatározható a molekuláris hőtan két fontos, egyenértékű univerzális állandója, a *Boltzmann*-konstans és az *Avogadro*-állandó. Az eljárás jelentős értéke, hogy lényegében egy különleges mozgásforma, a hőmozgás közvetlen megfigyelésén alapul, s ezáltal segíti a fizikaoktatás korszerűsítésére vonatkozó törekvéseinket.

### IRODALOM

- [1] M. HORNE, P. FARAGO, J. OLIVER: An Experiment to Measure Boltzmann's Constant. American Journal of Physics, 3, 344—348, 1973.
- [2] BUDÓ Á., PÓCZA J.: Kísérleti fizika I. Tankönyvkiadó, 1962.
- [3] HORVÁTH J.: Termodinamika és statisztikai mechanika. Tankönyvkiadó, 1960.
- [4] G. JOOS: Lehrbuch der theoretischen Physik. Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1934.
- [5] R. P. FEYNMANN, R. B. LEIGHTON, M. SANDS: Mai fizika IV. Műszaki Könyvkiadó, 1962.
- [6] F. KOHLRAUSCH: Praktische Physik, II. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.

## MESSUNG DER BOLTZMANN'SCHEN KONSTANTE AUFGRUND DER BROWN'SCHEN TRANSLATIONSBEWEGUNG

*P. Bor und L. Kovács*

Die Verfasser geben eine Ableitung der Einstein-Smoluchowski'schen Formel, zu deren Verständnis die Kenntnis des während der ersten drei Semester an der Hochschule gehörten Mathematik- und Physik-Unterrichts ausreicht. Zur Bestimmung der Boltzmann'schen Konstante geben sie eine laboratorisch-praktische Messmethode bekannt, welche auf der mikroskopischen Verfolgung der Brown'schen Translationsbewegung der in wässriger Milchpulversuspension Wärmebewegungen vollziehenden Kolloidpartikel bei 1350-facher Vergrößerung und der Feststellung des quadratischen Durchschnitts der Verschiebungen beruht. Die unmittelbare Beobachtung der Wärmebewegung als Schwankungserscheinung liefert den überzeugenden Beweis für die Richtigkeit der Grundhypothesen der molekularen Wärmelehre und das Leistungsvermögen der Theorie, modernisiert daher den Unterrichtsstoff und vervollkommen die Methoden.

## ИЗМЕРЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ БОЛЬЦМАНА НА ОСНОВАНИИ ТРАНСЛЯЦИОННОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

*П. Бор и Л. Ковач*

Авторы выводят формулы „Einstein—Smoluchowski“ в такой форме, что для понимания его достаточно знание материала первых трех семестров в институте на отделении математики и физики. Оно описывают лаборантные измерения, основанные на наблюдении при помощи микроскопа с увеличением 1350 трансляционного Броуновского движения коллоидной частицы, совершающей тепловое движение в водной суспензии молочного порошка и определением квадратичного среднего смещения частиц. Непосредственное наблюдение теплового движения, как явления колебательного характера, убедительно доказывает правильность основных теорем молекулярной термодинамики и продуктивность теории и поэтому совершенствует материалы обучения и его методы.